第 1 回スー 1★GP　解答例

問 1. 一般に，日付を 8 個の数字で表したとき，月の十の位は 0 か 1，日の十の位は 0 か 1 か 2 か 3 であることに注意する．

(1) 本日（2024 年 01 月 21 日）より過去で，2000 年以降の素晴らしい日は存在しない．なぜなら，そのような日があったとすると，$20XY$ 年の形になることから $X = 1$ となるが，このとき月の十の位に 0 も 1 も使えなくなってしまうからである．

2000 年より前で最も本日に近く，全ての数字が異なる年は 1987 年であり，そのうち最も本日に近く，全ての数字が異なる年月は 1987 年 06 月である．日は大きいほど本日に近いので，30 日から順に試していくことで，求める素晴らしい日は 1987 年 06 月 25 日であることが分かる．

答：1987 年 06 月 25 日

(2) まず，$2XYZ$ 年の形の素晴らしい日においては，月と日で必ず 0 と 1 を使うことに注意する．これは，月の十の位は 0 か 1 であることと，日の十の位は 2 を使用済みであることから 0 か 1 か 3 であり，3 の場合は一の位が 0 か 1 であることから分かる．

これより，本日（2024 年 01 月 21 日）より未来の素晴らしい日の年は最小でも 2345 年であることが分かる．上記の理由から月で 0, 1 の両方を使うことはできないので，ありうる最も本日に近い年月は 2345 年 06 月である．日は小さいほど本日に近いので，01 日から順に試していくことで，求める素晴らしい日は 2345 年 06 月 17 日であることが分かる．

答：2345 年 06 月 17 日

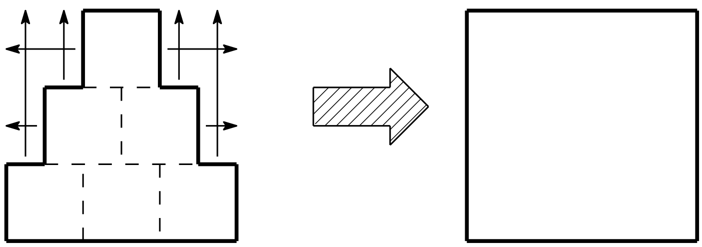
問 2. $\begin{cases} 123x + 234y = 345 & \cdots ① \\ 456x + 567y = 678 & \cdots ② \end{cases}$ において，

② − ① より $333x + 333y = 333$, よって $x + y = 1$.　$\cdots$③

① − ③ × 123 より $111y = 222$, よって $y = 2$. これを ③ に代入すると $x + 2 = 1$ より $x = -1$ が得られる．

答：$x = -1, y = 2$

問 3. 図のように線分を移動させて考えることで，求める長さは一辺が $3\text{cm} \times 17 = 51\text{cm}$ の正方形の周りの長さと一致していることが分かる．



よって，求める長さは $51\text{cm} \times 4 = 204\text{cm}$ である．

答：204cm

問 4. 3 で割り切れる自然数の各桁の和は 3 で割り切れるので，各桁の数字が 3 または 4 であり，3 も 4 も少なくとも 1 回は現れることから，最も少ない桁数としてあり得るのは $3, 4, 4, 4$ の並び替えであることが分かる（$3+4+4+4=15$ は 3 の倍数）．$3, 4, 4, 4$ の並び替えで最も小さい 3444 は 3 でも 4 でも割り切れるので，これが求める自然数である．

答：3444

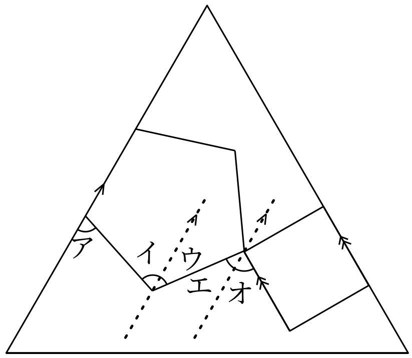
（別解）4 で割り切れる自然数の下二桁はやはり 4 で割り切れる（100 は 4 の倍数であるため）．3 と 4 でできる二桁の自然数のうち 4 で割り切れるのは 44 のみである．下二桁が 44 であり，各桁の数字が 3 または 4 であり，3 も 4 も少なくとも 1 回は現れる自然数は順に 344, 3344, 3444, ... となり，このうち最初に 3 で割り切れる 3444 が求める自然数である．

問 5. 図のように正三角形の辺に平行な直線を引く．

正五角形の一つの内角の大きさは $108°$ であるから，ア $= 180° - 108° = 72°$．
平行線の錯角より，イ $=$ ア $= 72°$．よって ウ $= 108° -$ イ $= 36°$．
再び平行線の錯角より エ $=$ ウ $= 36°$．

一方，オは正三角形の内角と等しく $60°$ であるから，$x° =$ エ $+$ オ $= 36° + 60° = 96°$．

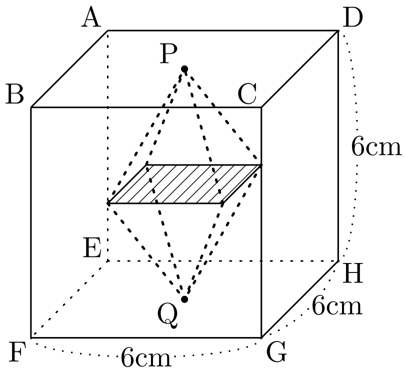
答：$x = 96$



問 6. 2 つの正四角すいが重なった部分は，1 辺が 3cm の正方形（図の斜線部分）を底面とする高さ 3cm の正四角すいを 2 つ合わせた形になる．

よって，その体積は $\left(3 \times 3 \times 3 \times \dfrac{1}{3}\right) \times 2 = 18$.

答：18cm^3



問 7. 使える数字は $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ の 8 種類で文字が 8 個あるので，全ての数字を用いることに注意する．

SU1 + MATH + K1TA = 9SYU において，百の位に着目すると「S + A + 1+ 十の位の繰り上がり」の一の位は S である．繰り上がりは 0 以上 2 以下なので，9 が使用済みであることと合わせて $\mathrm{A} = 7, 8$ が分かる．

$\mathrm{A} = 8$（十の位の繰り上がりが 1）のとき，SU1 + M8TH + K1T8 = 9SYU で 0 の文字で場合分けする．

- $\mathrm{H} = 0$ のとき，一の位から $\mathrm{U} = 9$ となり不適．
- $\mathrm{U} = 0$ のとき，一の位から $\mathrm{H} = 1$ となり不適．
- $\mathrm{T} = 0$ のとき，$\mathrm{U} \leqq 7$ に注意すると，十の位で繰り上がりが起こらないため不適．
- $\mathrm{Y} = 0$ のとき，一の位の繰り上がりは 1 でなので，十の位に着目すると $\mathrm{T} + \mathrm{T} + \mathrm{U} = 9$ となり，あり得る組合せは $\mathrm{T} = 2, \mathrm{U} = 5$ のみである．このとき千の位より $\mathrm{K} + \mathrm{M} = 8$ であるが，これを満たす組がないため不適．

$\mathrm{A} = 7$（十の位の繰り上がりが 2）のとき，SU1 + M7TH + K1T7 = 9SYU で 0 の文字で場合分けする．

- $\mathrm{H} = 0$ のとき，一の位から $\mathrm{U} = 8$．十の位から $\mathrm{T} + \mathrm{T} + 8 \geqq 22$（繰り上がりは 2 で，0,1 は使用済みのため 20, 21 は不可能）となり，$\mathrm{T} = 7, 8, 9$ はいずれも使用済みのため不適．
- $\mathrm{U} = 0$ のとき，一の位の繰り上がりは 1 なので，十の位から $\mathrm{T} + \mathrm{T} + 0 \geqq 21$ となり不適．
- $\mathrm{T} = 0$ のとき，十の位は「U + 0 + 0+ 一の位の繰り上がり」となり，十の位で繰り上がりが 2 になることは不可能であるため不適．
- $\mathrm{Y} = 0$ のとき，一の位の繰り上がりは必ず 1 なので，十の位より $\mathrm{T} + \mathrm{T} + \mathrm{U} = 19$ となり，あり得る組合せは $\mathrm{T} = 8, \mathrm{U} = 3$ のみである．このとき S31 + M78H + K187 = 9S03 となり，一の位より $\mathrm{H} = 5$，千の位より $\mathrm{M} = 2, \mathrm{K} = 6$ または $\mathrm{M} = 6, \mathrm{K} = 2$，余った S は 4 と決まる．

以上より覆面算の解は $431 + 2785 + 6187 = 9403$ または $431 + 6785 + 2187 = 9403$ であり，特に解答すべき値は 9403 である．

答：9403

問 8. 問題文のルールを少し変えて，1 を 0001 のように千の位まで 0 を補って書くことにする．このルールで $0(= 0000)$ から 1999 までを黒板に書いたとき，一の位に A が書かれるのは ○○○ A の形の数を書いたときで，○○○ は 000 から 199 までの可能性があるのでその回数は 200 回である．

同様に，十の位に A が書かれるのは ○○ A ○ の形の数を書いたときで，やはり ○○○ は 000 から 199 までの可能性があるのでその回数は 200 回である．

同様に，百の位に A が書かれるのは ◯ A ◯◯ の形の数を書いたときで，やはり ◯◯◯ は 000 から 199 までの可能性があるのでその回数は 200 回である．

千の位には 0 か 1 のみが書かれ，それぞれ百の位以下は 000 から 999 までの可能性があるのでその回数は 1000 回である．

ここまでで，0 と 1 を 1600 回，他の数字は 600 回書いたことになるが，ここで実際のルールに戻すと，0 は少なくとも千の位の 1000 個減ることになるから，結局次のことが分かる．

1 から 1999 までを黒板に書くと，1 は 1600 回，他の数字は 600 回以下書かれる．

残りは 2000 から 2024 までの 25 個で，書く数字は合計 $25 \times 4 = 100$ 個しかないので，最終的に最も多く書かれた数字が 1 であることが分かる．

あとは 2000 から 2024 までで 1 が書かれた回数を求めればよい．それは一の位に 2001, 2011, 2021 の 3 回，十の位に $2010, \ldots, 2019$ の 10 回であるから，全て合わせた回数は

$$1600 + 3 + 10 = 1613$$

である．

答：最も多く書かれた数字は 1 で，1613 回

問 9. 57 の正の約数は $1, 3, 19, 57$ の 4 つであるから，J は嘘つき村の村人である．A の発言は，A がどちらの村の村人であると仮定しても，それ単独では矛盾しない．

B~I の発言の正誤について考える．A~J の中にいる嘘つき村の村人の人数を n（10 以下の自然数），d を n の正の約数のうち 1 以外のものの個数とすると，d は B~I の中にいる正直村の村人の人数に等しい．n の値と d の値の対応は以下の表のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0	1	1	2	1	3	1	3	2	3

A が嘘つき村の村人であるとき，正直村の村人は全部で d 人であり，$n + d = 10$ が成り立つ．これを満たす n は存在しない．一方，A が正直村の村人であるとき，正直村の村人は全部で $d + 1$ 人であり，$n + d + 1 = 10$ が成り立つ．これを満たす n は $n = 6$ である．このとき，B~I の中にいる正直村の村人は，B, C, F である．よって，正直村の村人は A，B，C，F の 4 人である．

答：A，B，C，F

問 10. 図のように各町を白と黒に塗ると，点線で示した道を使ったときを除き，1 回移動するごとに白い町からは黒い町に，黒い町からは白い町に移動することになる．

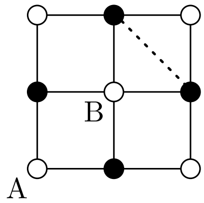
町 A から点線の道を使わずに 5 回移動すると黒い町に到達するので，町 B に到達するためには点線の道を使う必要がある．

点線の道を使えるのは 4 回目の移動のみである．これを右下から左上に通る場合，5 回目の移動は下に決まり，1 回目から 3 回目の移動は（右，右，上）,（右，上，右）,（上，右，右）の 3 通りである．

点線の道を左上から右下に通る場合，5 回目の移動は左に決まり，1 回目から 3 回目の移動は（右，上，上），(上，右，上)，(上，上，右）の 3 通りである．

よって求める移動の方法は合計で 6 通り．

答：6 通り



問 11． 自然数 a, b を用いて $\dfrac{2^a}{3^b}$ の形で表される数を「良い分数」ということにする．1 との差が 0.1 未満の良い分数を 3 つ見つけたい．以下では，$\dfrac{2^a}{3^b}$, $\dfrac{2^c}{3^d}$ が $\dfrac{2^a}{3^b} < 1 < \dfrac{2^c}{3^d}$ を満たす良い分数であるとき，その積 $\dfrac{2^{a+c}}{3^{b+d}}$ も良い分数であり，$\dfrac{2^a}{3^b}$, $\dfrac{2^c}{3^d}$ の間にあること，すなわち $\dfrac{2^a}{3^b} < \dfrac{2^{a+c}}{3^{b+d}} < \dfrac{2^c}{3^d}$ を用いる．

まず，1 にある程度近い良い分数として，$\dfrac{2^3}{3^2}$, $\dfrac{2^5}{3^3}$ がある．これらは，$\dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9} < 0.9$, $\dfrac{2^5}{3^3} = \dfrac{32}{27} > 1.1$ で問題の条件を満たさない．しかし，これらの積 $\dfrac{2^3}{3^2} \cdot \dfrac{2^5}{3^3} = \dfrac{2^8}{3^5} = \dfrac{256}{243}$ を考えると, $1 < \dfrac{2^8}{3^5} < 1.1$ となる．

次に，$\dfrac{2^3}{3^2} \cdot \dfrac{2^8}{3^5} = \dfrac{2^{11}}{3^7} = \dfrac{2048}{2187}$ は，$0.9 < \dfrac{2^{11}}{3^7} < 1$ を満たす．

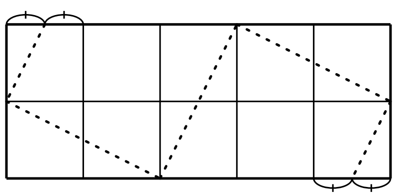
最後に, $\dfrac{2^{11}}{3^7} \cdot \dfrac{2^8}{3^5} = \dfrac{2^{19}}{3^{12}}$ は，$0.9 < \dfrac{2^{19}}{3^{12}} < 1.1$ を満たすことが分かる（1 との大小を調べる必要はないが，$0.9 < \dfrac{2^{19}}{3^{12}} < 1$ である）．こうして，1 との差が 0.1 未満の良い分数を 3 つ見つけることができた．なお，解答中の良い分数の大小関係は次の通りである：

$$\frac{2^3}{3^2} < 0.9 < \frac{2^{11}}{3^7} < \frac{2^{19}}{3^{12}} < 1 < \frac{2^8}{3^5} < 1.1 < \frac{2^5}{3^3}$$

答：$(8, 5), (11, 7), (19, 12)$

※他にも $(27, 17), (30, 19)$ など無数にあるがそのうち 3 つを答えればよい

問 12． 折り目は下図の通り，またはそれと左右対称なものになる．できあがった正方形の一辺の長さが $\sqrt{5}$ であることと，正方形の頂点は折り紙の辺の上にくることに注意するとよい．



問 13. 並べ替えてできる 7 桁の整数が，自然数 n の 4 乗になるとする．n^4 を 9 で割った余りは，その各桁の和 $4+4+4+5+6+7+7=37$ を 9 で割った余りの 1 に等しい．一方で，整数 k を 9 で割った余りと k^2, k^4 を 9 で割った余りは以下の表のようになる（k^4 が k^2 の 2 乗であることを使うと少し計算を簡単にできる).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
k^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
k^4	0	1	7	0	4	4	0	7	1

よって，n を 9 で割った余りは，1 または 8 であることが分かった．そのような自然数を小さい方から列挙すると以下のようになる．

$$1, 8, 10, 17, 19, 26, 28, 35, 37, 44, 46, 53, 55, 62, 64, \dots$$

$4, 4, 4, 5, 6, 7, 7$ を並べ替えてできる 7 桁の整数のうち，最小のものは 4445677，最大のものは 7765444 であるから，$4445677 \leqq n^4 \leqq 7765444$ である．ここで，

$$44^4 = 1936^2 < 2000^2 = 4000000 < 4445677,$$
$$53^4 = 2809^2 > 2800^2 = 7840000 > 7765444$$

より，$n = 46$ 以外の場合は除外される．

最後に，46^4 を計算すると，$46^4 = 2116^2 = 4477456$ となり，これが $4, 4, 4, 5, 6, 7, 7$ を並べ替えてできる唯一の 4 乗数である．

答：4477456

（補足解説）可能な限り n^4 を具体的に計算することなく，n の候補を絞り込むことがこの問題のポイントである．上の解答中では，

(1) $4445677 \leqq n^4 \leqq 7765444$ から n の範囲を絞り込む,

(2) n を 9 で割った余りを考える

という 2 つのアイデアを用いていた．他に有効な方法として，

(3) n の下一桁が 1, 3, 7, 9 のとき n^4 の下 1 桁が 1 になり，n の下一桁が 5 のとき n^4 の下 2 桁が 25 になることから，n が奇数の場合を除外できる（n が偶数と分かる）

という方法もある．(2) で 9 で割った余りではなく，3 で割った余りを考えることもできるが，n が 3 の倍数である場合のみしか除外されないので，9 で割った余りを考えた方がより n を絞り込めている．

問 14. この解答中では丸を記号の◯で表す．図のように，上から第 1〜4 行，左から第 1〜4 列と呼ぶ．

	第1列	第2列	第3列	第4列
第 1 行	◯	◯	◯	
第 2 行			◯	
第 3 行	◯	◯	◯	
第 4 行	◯	◯		◯

行ごとに◯の数を足すことで，全体の◯の数が，

$$1+1+1+1,\quad 3+1+1+1,\quad 3+3+1+1,\quad 3+3+3+1,\quad 3+3+3+3$$

のいずれかであることが分かる．それぞれの場合について，◯の書き込み方が何通りあるか求める．各列にある◯の個数も同じ足し算の形に分解されることに注意する（例えば，◯の個数が $3+3+1+1$ 個ならば，行だけでなく列についても◯が 3 個の列が 2 つ，◯が 1 個の列が 2 つとなる）．

(1) 1+1+1+1
第 1~4 行について，順にどの列に◯を書き込むかを考えればよい（各列が 1 度ずつ選ばれる）．書き込み方は，$4\times 3\times 2\times 1=24$ 通りである．

(2) 3+1+1+1
まず，◯が 3 つの行の選び方は 4 通り，◯が 3 つの列の選び方が 4 通りある．簡単のため，以下では◯が 3 つの行が第 1 行，◯が 3 つの列が第 1 列の場合を考える．行や列を入れ替えることで，他の場合も同じ通りだけ書き込み方があることが分かる．

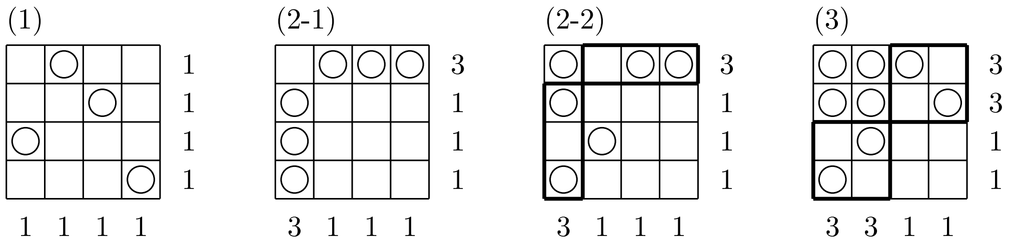
(2-1) 左上のマス（第 1 行第 1 列のマス）が◯でない場合，すべての◯の位置が決まる（$4\times 4=16$）．

(2-2) 左上のマス（第 1 行第 1 列のマス）が◯の場合，図の太枠の四角 2 つの中で，◯のないマスを 1 つずつ選ぶことで，すべての◯の位置が決まる．

(2-1) の場合は 1 通り，(2-2) の場合は $3\times 3=9$ 通りであるから，合計は 10 通り．◯が 3 つの行が第 1 行，◯が 3 つの列が第 1 列以外の場合も考えると，$4\times 4\times 10=160$ 通りである．

(3) 3+3+1+1
まず，◯が 3 つの行の選び方は，4 つの行から 2 つの行を選ぶ方法で，6 通りである．◯が 3 つの列の選び方も，6 通りである．簡単のため，以下では◯が 3 つの行が第 1 行と第 2 行，◯が 3 つの列が第 1 列と第 2 列の場合を考える．行や列を入れ替えることで，他の場合も同じ通りだけ書き込み方があることが分かる．

この場合の書き込み方は，図のように決まる．ここで太枠の四角 2 つについては，それぞれの中で，◯を隣り合わないよう 2 つ書き込む．太枠の四角それぞれで 2 通りのパターンがあるので，書き込み方は $2\times 2=4$ 通りである．◯が 3 つの行，◯が 3 つの列について全ての場合を考えると，$6\times 6\times 4=144$ 通りである．



(4) 3+3+3+1
各行と各列について◯が 1 個または 3 個あるという条件は，◯のないマスが 1 個または 3 個あると言い換えることができる．よって，各マスについて◯のある・ないを入れ替えれば，この場合の数は，◯の数が $3+1+1+1$ 個の場合と全く同じになる．よって，(2) の結果から，160 通りである．

(5) 3+3+3+3
(4) と同様に，◯のある・ないを入れ替えて，(1) の場合と同じ数あることが分かるから，24 通りである．

以上の結果を合計すると，$24+160+144+160+24=512$ 通りである．

答：512 通り

（別解）各行・各列について，◯が 1 個または 3 個あることは，◯が奇数個あることと言い換えることができる．各行・各列について，4 つのマスのうち 3 つについて◯のある・なしが決まっていると，残りの 1 マスの書き込み方（◯のある・なし）の一方については◯の数が奇数個，もう一方については偶数個となる．

そこで，左上の 3×3 のマス目（第 1~3 行，第 1~3 列）の書き込み方を自由に決めると，上で述べた事実を第 1~3 行と第 1~4 列に順に適用することで，図の A~G の◯のある・なしが 1 通りに決まることが分かる．

ここで実は，第 4 行（D~G）についても◯が奇数個になる．なぜなら，第 4 行の◯の個数は

（第 1~4 列にある◯の個数の合計）$-$（第 1~3 列にある◯の個数の合計）

であり，これは（奇数 4 つの和）$-$（奇数 3 つの和）より奇数となるからである．

結局，左上の 3×3 の各マスについて自由に◯のある・なしを定める方法だけ書き込み方があることが分かるので，答えは $2^9=512$ 通りである．

			A
			B
			C
D	E	F	G

問 15． 正方形 ABCD の一辺の長さを a，P から直線 $\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{DA}$ に下ろした垂線の長さを順に x, y, z, w とおくと，$x+z=y-w=a$ である．このことから，

$$\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCD}=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}az=\frac{1}{2}a(x+z)=\frac{1}{2}a^2,$$
$$\triangle\mathrm{PBC}-\triangle\mathrm{PDA}=\frac{1}{2}ay-\frac{1}{2}aw=\frac{1}{2}a(y-w)=\frac{1}{2}a^2$$

である（計算式中の $\triangle\mathrm{PAB}$ などは，その面積を表す）．$\triangle\mathrm{PBC}=S$, $\triangle\mathrm{PDA}=T$ とおくと，

$$S-T=\frac{1}{2}a^2=\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCD}=21+4=25 \quad \cdots ①$$

となる．

S, T の関係式をもう 1 つ得るために，次の事実を用いる：2 つの辺の長さが p, q でありその間の角度が $45°$ または $135°$ の三角形の面積は $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}pq$ である（長さが p の辺を底辺にすると，高さが $\dfrac{1}{\sqrt{2}}q$ になることから分かる）．円周角の定理より，$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{ADB} = 45°$．同様に，$\angle\mathrm{BPC} = 45°$, $\angle\mathrm{CPD} = 45°$ であり，さらに 3 つの和をとって，$\angle\mathrm{DPA} = 135°$．

よって，

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}PA \cdot PB, \quad \triangle\mathrm{PCD} = \frac{1}{2\sqrt{2}}PC \cdot PD,$$
$$\triangle\mathrm{PBC} = \frac{1}{2\sqrt{2}}PB \cdot PC, \quad \triangle\mathrm{PDA} = \frac{1}{2\sqrt{2}}PD \cdot PA$$

となるので，特に

$$ST = \triangle\mathrm{PBC} \cdot \triangle\mathrm{PDA} = \triangle\mathrm{PAB} \cdot \triangle\mathrm{PCD} = 4 \cdot 21 = 84 \quad \cdots ②$$

を得る．

① より $T = S - 25$ なので，これを ② に代入して，$S^2 - 25S - 84 = 0$ すなわち $(S-28)(S+3) = 0$ を得る．$S > 0$ なので，$S = 28$ である．

答：$28\mathrm{cm}^2$

（別解）問題文中の円の中心を O，半径を r，正方形 ABCD の一辺の長さを a とおく．本解と同じ方法で，$\dfrac{1}{2}a^2 = 21 + 4 = 25$ が分かる．$a = 5\sqrt{2}$, $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}a = 5$ である． O を通り，直線 BC に平行な直線を m とおき，P から m に下ろした垂線の足を H とおく．

$\mathrm{OH} = x$, $\mathrm{PH} = y$ とおくと，三平方の定理より

$$x^2 + y^2 = r^2 = 25 \quad \cdots ①$$

である．また，

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{1}{2}a\left(\frac{a}{2} - x\right) \quad \cdots ②, \qquad \triangle\mathrm{PBC} = \frac{1}{2}a\left(\frac{a}{2} + y\right) \quad \cdots ③$$

である．② に $a = 5\sqrt{2}$ と $\triangle\mathrm{PAB} = 4$ を代入して，$x = \dfrac{17}{5\sqrt{2}}$ を得る．これと ① より $y = \dfrac{31}{5\sqrt{2}}$．これを ③ に代入して，$\triangle\mathrm{PBC} = 28$ を得る．